LOS IDEALES IRRELEVANTES EN LA TEORIA DE COHOMOLOGIA DE SUPERFICIES ALGEBRAICAS

LOS IDEALES IRRELEVANTES EN LA TEORIA DE COHOMOLOGIA DE SUPERFICIES ALGEBRAICAS

por

PEDRO ABELLANAS

§ **1. Introducción.**—Sea k un cuerpo arbitrario con infinitos elementos, $X_0, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre k, I un ideal primo y homogéneo de $k[X_0, \ldots, X_n]$, de dimensión dos como ideal homogéneo. $P = k[X_0, \ldots, X_n]/I$ y $X_i \equiv \eta_i (I)$, $i = 0, \ldots, n$. Entonces $P = k[\eta_0, \ldots, \eta_n]$ es un anillo homogéneo y $(\eta_0, \ldots, \eta_n)$ es un punto general homogéneo de una superficie S algebraica bidimensional. El punto $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i = \frac{\eta_i}{\eta_0}$, $i = 1, \ldots, n$, es un punto general de la superficie algebraica afín S — H, siendo H la intersección en S del hiperplano $X_0 = 0$. El cuerpo $\Sigma = k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ se llama cuerpo de las funciones racionales sobre S. Si $\Omega = k(\eta_0, \ldots, \eta_n)$, se verifica que $\Omega = \Sigma(\eta_0)$, siendo η_0 transcendente sobre Σ. Si $\zeta_0, \ldots, \zeta_m$ son elementos del mismo grado de homogeneidad de Ω, tales que el cuerpo de cocientes de $k[\zeta_0, \ldots, \zeta_m]/\zeta_i - 1$, $i = 0, \ldots, m$, sea isomorfo a Σ, el punto $(\zeta_0, \ldots, \zeta_m)$ es un punto general homogéneo de S.

Si F es una forma de P, representaremos por [F] al conjunto abierto, en la topología de Zariski, formado por todos los puntos de S que no pertenecen a la curva representada por radical P F.

Al ideal $\mathfrak{P}_1 = P(\eta_0, \ldots, \eta_n)$ se le llama ideal irrelevante primo de P y, a sus ideales primarios, ideales irrelevantes de P.

1. *Se pueden hallar ideales irrelevantes cuyas bases estén constituídas por tres formas de P del mismo grado.*

2. *Si $P(F, G, H)$ es un ideal irrelevante de P, $\mathfrak{A} = \{[F], [G], [H]\}$ es un recubrimiento de S, y recíprocamente.*

3. Si F, G, H, K son cuatro formas del mismo grado de P, tales que $\mathfrak{A} = \{[F], [G], [H], [K]\}$ sea un recubrimiento de S, toda co-cadena unidimensional relativa a $\mathfrak{A}$ puede representarse en la siguiente forma:

$$(1)\qquad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
[F] \cap [G] & [F] \cap [H] & [F] \cap [K] & [G] \cap [H] & [G] \cap [K] & [H] \cap [K] \\
\hline
\dfrac{A_1}{F^\alpha\, G^\alpha} & \dfrac{A_2}{F^\alpha\, H^\alpha} & \dfrac{A_3}{F^\alpha\, K^\alpha} & \dfrac{A_4}{G^\alpha\, H^\alpha} & \dfrac{A_5}{G^\alpha\, K^\alpha} & \dfrac{A_6}{H^\alpha\, K^\alpha}
\end{array}$$

en donde todas las funciones de (1) son elementos de Ω homogéneos de grado cero. Análogamente, toda co-cadena bidimensional sobre $\mathfrak{A}$ puede representarse en la siguiente forma:

$$(2)\qquad \begin{array}{c|c|c|c}
[F] \cap [G] \cap [H] & [F] \cap [G] \cap [K] & [F] \cap [H] \cap [K] & [G] \cap [H] \cap [K] \\
\hline
\dfrac{A}{F^\alpha\, G^\alpha\, H^\alpha} & \dfrac{B}{F^\alpha\, G^\alpha\, K^\alpha} & \dfrac{C}{F^\alpha\, H^\alpha\, K^\alpha} & \dfrac{D}{G^\alpha\, H^\alpha\, K^\alpha}
\end{array}\ .$$

La condición necesaria y suficiente para que (2) sea un cociclo es que

$$(3)\qquad A\, K^\alpha - B\, H^\alpha + C\, G^\alpha - D\, F^\alpha = 0\,.$$

4. Si $\mathfrak{P}_m$ representa el conjunto de todos los polinomios de P, cuyos términos de menor grado sean de grado mayor o igual a m, se verifica que $\mathfrak{P}_m$ *es un ideal irrelevante de grado* m. Entre estos ideales se verifica la relación: $\mathfrak{P}_m \supset \mathfrak{P}_{m+1}$.

5. Si P_m es el anillo sobre k engendrado por todas las formas de P cuyos grados son múltiplos de m, P_m *es un anillo homogéneo correspondiente a la superficie S.*

6. *Entre los anillos* P_m *se verifica la relación:* $P_i \supset P_{i+1}$, $i = 1, \ldots, P_1 = P$.

§ 2. Los ideales irrelevantes y el grupo $\mathcal{H}^2$ (S).

LEMA 1. *Si F, G y H son tres formas de grado* n *tales que* $\mathfrak{P}_n \subset P\,(F, G, H)$, *se verifica que* $\mathfrak{P}_{n\alpha} \subset P\,(F, G, H)^\alpha$.

Demostración. Basta probar que toda forma de $\mathfrak{P}_{n\alpha}$ pertenece a $P(F, G, H)^\alpha$. Si Φ es una forma de $\mathfrak{P}_{n\alpha}$, será grad $(\Phi) = n\,\alpha + r$, $r \geqslant 0$. Luego $\Phi \in \mathfrak{P}_n$, de donde $\Phi = A\,F + B\,G + C\,H$, grad $(A) =$ grad $(B) =$ grad $(C) = n\,(\alpha - 1) + r$. Repitiendo el proceso con A, B y C, y así sucesivamente, resulta que Φ es un polinomio en F, G, H de grado α con coeficientes en P de grado r en las η.

Lema 2. *Si* $\mathfrak{P}_n \subset P(F, G, H)$ *se verifica que* $P_n(F, G, H)$ *es el ideal irrelevante primo de* P_n.

Este lema es consecuencia inmediata del anterior sin más que observar que todas las formas de P_n son de grados múltiplos de n.

Lema 3. *Si* $\mathfrak{P}_n \subset P(F, G, H)$, *se puede hallar, de infinitos modos, otra forma K de grado* n *tal que* $\mathfrak{P}_n \subset P(F, G, K)$, $\mathfrak{P}_n \subset P(F, H, K)$ *y* $\mathfrak{P}_n \subset P(G, H, K)$.

Demostración. Basta observar que si $K = \lambda\,F + \mu\,G + \nu\,H$, siendo λ, μ, ν elementos arbitrarios de K, se verifica que, si $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, es

$$P(F, G, H) = P(F, G, K) = P(F, H, K) = P(G, H, K)\,.$$

Sean F, G, H, K cuatro formas de grado n que verifiquen las condiciones del lema anterior. Sea $\mathfrak{A} = \{[F], [G], [H], [K]\}$ el recubrimiento de S determinado por ellas.

Teorema 1. *Si existe un recubrimiento* $\mathfrak{A} = \{[F], [G], [H], [K]\}$ *tal que* $\mathfrak{P}_n \subset P(F, G, H)$, *siendo K una forma determinada de acuerdo con el lema anterior, se verifica que* $H^2(S) = 0$.

Demostración. Sea (2), (3) un cociclo bidimensional arbitrario relativo al recubrimiento $\mathfrak{A}$. Vamos a ver que podemos hallar una co-cadena unidimensional (1) cuyo co-borde sea (2). En efecto, para que el co-borde de (1) sea (2) es necesario y suficiente que

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1\,H^\alpha - A_2\,G^\alpha + A_4\,F^\alpha &= A\,,\\ A_1\,K^\alpha - A_3\,G^\alpha + A_5\,F^\alpha &= B\,,\\ A_2\,K^\alpha - A_3\,H^\alpha + A_6\,F^\alpha &= C\,,\\ A_4\,K^\alpha - A_5\,H^\alpha + A_6\,G^\alpha &= D\,.\end{aligned}\right.$$

Si F, G, H y K son formas de grado n, se verificará que A, B, C y D son formas de grado $3\alpha n$ y $A_1, \ldots, A_6$ formas de grado $2\alpha n$

En virtud del lema 1, por ser A una forma de grado $3\alpha n$, se puede expresar como forma, con coeficientes en k, en F, G, H, de grado 3α. Por consiguiente, en cada uno de sus términos figurará una potencia, por lo menos, de F, G o H, de grado α, luego se podrá escribir A del siguiente modo:

$$B_1 H^\alpha - B_2 G^\alpha + B_4 F^\alpha = A . \tag{5}$$

Análogo razonamiento respecto de B permite hallar las formas B'_1, B_3 y B_5 de modo que

$$B'_1 K^\alpha - B_3 G^\alpha + B_5 F^\alpha = B . \tag{6}$$

De (5) y (6) resulta:

$$\begin{aligned}(B_1 - B'_1) H^\alpha K^\alpha - G^\alpha (B_2 K^\alpha - B_3 H^\alpha) + F^\alpha (B_4 K^\alpha - B_5 H^\alpha) \\ = A K^\alpha - B H^\alpha .\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición de co-ciclo (3), se obtiene:

$$\begin{aligned}(B_1 - B'_1) H^\alpha K^\alpha - G^\alpha (B_2 K^\alpha - B_3 H^\alpha) + F^\alpha (B_4 K^\alpha - B_5 H^\alpha) \\ = D F^\alpha - C G^\alpha ,\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}(B_1 - B'_1) H^\alpha K^\alpha = (B_2 K^\alpha - B_3 H^\alpha - C) G^\alpha \\ - (B_4 K^\alpha - B_5 H^\alpha - D) F^\alpha ,\end{aligned}$$

o bien:

$$(B_1 - B'_1) H^\alpha K^\alpha \equiv 0 \, (P (G^\alpha, F^\alpha)) . \tag{7}$$

Ahora bien, por ser $P (H^\alpha, G^\alpha, F^\alpha)$ y $P (K^\alpha, G^\alpha, F^\alpha)$ ideales irrelevantes, se verifica que H^α y K^α no son divisibles por ninguno de los ideales mínimos primos de $P (G^\alpha, F^\alpha)$, de donde resulta, en virtud de (7), que

$$B_1 - B'_1 \equiv 0 \, (P (G^\alpha, F^\alpha)) ,$$

o bien:

$$B'_1 = B_1 + M\,G^\alpha + N\,F^\alpha .$$

Llevando esta expresión de B'_1 a (6), se obtiene:

$$(8) \qquad B_1\,K^\alpha - (B_3 - M\,K^\alpha)\,G^\alpha + (B_5 + N\,K^\alpha)\,F^\alpha = B .$$

Poniendo

$$A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,\ A_3 = B_3 - M\,K^\alpha,\ A_4 = B_4 \text{ y } A_5 = B_5 + N\,K^\alpha,$$

las expresiones (5) y (8) se escribirán en la siguiente forma:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_1\,H^\alpha - A_2\,G^\alpha + A_4\,F^\alpha = A , \\ A_1\,K^\alpha - A_3\,G^\alpha + A_5\,F^\alpha = B . \end{array} \right.$$

De (9) se deduce, teniendo en cuenta (3),

$$(10) - (A_2\,K^\alpha - A_3\,H^\alpha)\,G^\alpha + (A_4\,K^\alpha - A_5\,H^\alpha - D)\,F^\alpha = -C\,G^\alpha ,$$

o bien:

$$(11) \qquad (A_4\,K^\alpha - A_5\,H^\alpha - D)\,F^\alpha \equiv 0\,(P\,(G^\alpha)) .$$

Como F^α no es divisible por ninguno de los divisores mínimos primos de $P\,(G^\alpha)$ (por ser $P\,(F^\alpha, G^\alpha, H^\alpha)$ irrelevante), de (11) se deduce que

$$A_4\,K^\alpha - A_5\,H^\alpha - D \equiv 0\,(P\,(G^\alpha)) ,$$

o bien:

$$(12) \qquad A_4\,K^\alpha - A_5\,H^\alpha - D = -A_6\,G^\alpha .$$

Sustituyendo (12) en (10) y dividiendo por G^α, se obtiene:

$$(13) \qquad A_2\,K^\alpha - A_3\,H^\alpha + A_6\,F^\alpha = C .$$

Las igualdades (9), (13) y (12) son las (4).

Q. E. D.

LITERATURA

P. ABELLANAS: *Correspondences algébriques.* «Rev. Mat. Hisp. Am.», 1949.

J. P. SERRE: *Faisceaux algébriques cohérents.* «Ann. of Math.», 1955.

Universidad de Madrid.